Univerzitet u Zenici
Ekonomski fakultet
Zenica, 30.11.2010.

Parcijalni ispit iz predmeta Matematika

I grupa

1. Dokazati matematičkom indukcijom da važi:
$$\left(1-\frac{9}{2^2}\right)\left(1-\frac{9}{5^2}\right)\ldots\left[1-\frac{9}{(3n-1)^2}\right]=-\frac{3n+2}{2(3n-1)}\ (n\in\mathbb{N}).$$
2. Naći sve vrijednosti korjena $\sqrt[3]{z}$, ako je $z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^5\left(\sqrt{3}+i\right)^{13}$.
3. Diskutovati rang matrice $M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & m+1 & m\\ 2 & 4 & 2m+1 & m+1\end{bmatrix}$ u zavisnosti od parametra.
4. Izračunati limese $L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n+1)}}{2n^2+n+1}$ i $L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-5}-\dfrac{n^3+n^2+4n-1}{n^2-3n-10}\right)$.

II grupa

1. Izračunati x ako u binomnom razvoju $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^8$ dobijemo 56 kad oduzmemo šesti od četvrtog člana.
2. Riješiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva: $z^4-2z^2+9=0$.
3. Riješiti matričnu jednačinu $(3X)^{-1}+B^{-1}=(AX)^{-1}$, ako je
$$A=\begin{bmatrix}6 & 1 & -4\\ 1 & 3 & 2\\ 6 & 0 & -5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -4 & 4 & 1\end{bmatrix}.$$
4. Izračunati limese $L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$, $L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+4}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$.

III grupa

1. Dokazati matematičkom indukcijom da važi:
$$\frac{1\cdot 2}{3!}+\frac{2\cdot 2^2}{4!}+\frac{3\cdot 2^3}{5!}+...+\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\ (n\in \mathbb{N}).$$
2. Napisati u trigonometrijskom obliku broj $z=\dfrac{a\sqrt{b}+ib\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-ai\sqrt{b}}$, pri čemu su a i b pozitivni realni brojevi i zatim izračunati $\sqrt{z}$.
3. Riješiti matričnu jednačinu $(AX+A)^{-1}=BA$, ako je $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.
4. Izračunati limese $L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+5^2+...+5^{n-1}}{25^n-1}$, $L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2+1}+\dfrac{4}{n^2+1}+\dfrac{6}{n^2+1}+...+\dfrac{4n}{n^2+1}\right)$.

IV grupa

1. Izračunati x ako u binomnom razvoju $\left(\dfrac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2^x}\right)^6$ važi: $9T_3-T_5=240$.
2. Izračunati vrijednost determinante $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, ako je $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra:
$$(m+1)x-2y+(m+2)z=2m$$
$$-2x+my-2z=-2$$
$$(m-1)x-y+z=m-1.$$
4. Izračunati limese $L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+\sqrt[3]{n^4-n^6}\right)$, $L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{3n+1}-\dfrac{n}{2}\right)$.